CANTOR E O NÚMERO TRANSFINITO

Para estudar o *L'Étourdit* de Lacan

Pesquisa para o Ateliê de Leitura – Clin-*a*
por A. Claudete A. L. Prado
Reunião de 12-11-2014

CANTOR (George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor), Filósofo, Físico e Matemático. Filho de dinamarqueses, mãe católica e pai judeu convertido para o protestantismo. Nasceu em São Petersburgo, em 3/03/1845, e morreu em 6/01/1918 na cidade de Halle (Alemanha) a 150 Km de Berlim. Iniciou seus estudos em Berlin, seguindo os cursos dos matemáticos: Weierstrass em Análise, Kummer em Aritmética e Kronecker em Teoria dos Números. Fez seu doutorado na Universidade de Göttingen em 1867 e tornou-se Professor na Universidade de Halle, de 1869 a 1905. É um intelectual de formação alemã, considerado como um matemático alemão.

Dedicou-se fervorosamente ao estudo dos números infinitos, tendo identificado que existem várias classes desses números que não apresentam o mesmo tamanho – não são equipotentes. Por exemplo: demonstrou que o conjunto dos números reais R apresenta uma "infinitude" maior que a do conjunto dos números racionais Q. Foi por meio do estudo dos números infinitos que Cantor criou a Teoria dos Conjuntos, que lhe permitiu atribuir tamanhos, "potências", aos mais diversos tipos de conjuntos com infinitos elementos conduzindo-o à concepção do número transfinito.

1. DEFINIÇÃO DE ALGUNS TERMOS APLICADOS À MATEMÁTICA

- **CLASSE** e **CONJUNTO** – são **termos similares**, mas não idênticos.
  Classe – refere-se à **lógica Clássica**, ao silogismo aristotélico – é a extensão de um conceito.
  Conjunto – fundado na **lógica matemática** – reunião de objs. predeterminados → T. dos Conjuntos.
- **CONCEITO –** é constituído por:
  a) compreensão – coleção de predicados: Homem (enquanto conceito, abstrato, predefinido) = animal, mamífero, racional..., são as "notas" que o definem (**conotação**, para os anglo-americanos),
  b) extensão – coleção dos sujeitos que possuem os atributos, concretamente – **apresentados em ato**: é animal, é mamífero, é racional... (**denotação** para os anglo-americanos.

2. AS PEDRAS NO CAMINHO – PARADOXOS – PROBLEMAS "INSOLÚVEIS" NA MATEMÁTICA

Em pesquisas matemáticas, quando a classe apresentava um número infinito de sujeitos, surgiam paradoxos, sobretudo devidos a dois princípios:

a) O TODO É MAIOR QUE A PARTE (já que ele a contém) – e isso é verdade.

b) DUAS CLASSES EMPARELHADAS EM "CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA" (hoje se diz **"BIJEÇÃO"** (BOURBAKI)), **TÊM A MESMA QUANTIDADE DE SUJEITOS** – isso também é verdade.

Examinando: sejam as classes dos nº naturais N e a dos nº pares P emparelhados pela bijeção p=2n:

N   P (compreensão)
0 ↔ 0
1 ↔ 2
2 ↔ 4
3 ↔ 6
(extensão)
⋮
n ↔ p=2n
⋮
$\forall n \rightarrow \exists p=2n$
$\exists n=1/2p \leftarrow \forall p$

. <u>Princípio</u> (a): $N = \{0, 1, 2, 3,\ldots\} = \{\underbrace{0, 2, 4,}_{P} 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5. 7\}$

Logo, N contém P. N é um TODO e P é uma PARTE, daí há em N uma quantidade maior de números do que em P, isto é: N e P não têm a mesma quantidade de números.

. <u>Princípio</u> (b): em uma sala, todo aluno tem uma carteira, em toda carteira há um aluno: o número de alunos e de carteiras são iguais. Vê-se então que N e P têm a mesma quantidade de números.

<u>DOIS PRINCIPIOS CONTRADITORIOS!!!</u>

Por conta dessa CONTRADIÇÃO, **Leibniz, em 1672**, concluiu que o **infinito em ato é impossível**, só pode existir o **infinito em potência** (p. ex.: na coleção dos números naturais não existe um número que seja maior, **sempre há um n + 1** que torna impossível completar essa coleção), como pregava Aristóteles (em 350 AC).

3. A SOLUÇÃO CANTORIANA

Para que se pudesse avançar no desenvolvimento da **Análise Matemática** (Análise das séries de Fourier, Cálculo Integral Diferencial, etc), **Cantor precisava do infinito em ato** – da coleção infinita completa. Para tanto, promoveu as seguintes inovações:

a) **Introduziu a classe que adotava o princípio (b)** (e violava o princípio (a) quando era infinita) **e chamou essa classe de CONJUNTO**, para distingui-la da classe lógica (do silogismo), tomando-a no campo da pura matemática.

b) **Deu o nome de cardinalidade, à quantidade de elementos de um conjunto**. Assim, a cardinalidade de {a, b, c} é 3 – nota-se: card(a,b,c} = 3.

c) **Atribuiu a primeira letra do alfabeto hebreu א (Alef) à cardinalidade dos conjuntos naturais N, infinito.**

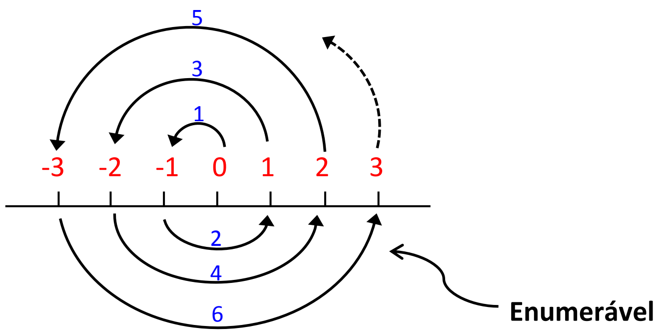
Assim, por emparelhamento, a cardinalidade do conjunto dos pares é a mesma dos números naturais: card(P) = card(N), quer dizer: esses conjuntos são **equipotentes**.

Obs.: Enquanto a <u>Classe Lógica</u> dá ênfase à <u>compreensão</u>, **na T. dos Conjuntos a ênfase está na extensão**.

4. UMA FORMA DE EMPARELHAMENTO

O conjunto dos números inteiros (relativos) Z = (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...) é equipotente ao conjunto N. Essa afirmação se confirma no seguinte fato: pela bijeção, o conjunto Z pode ser emparelhado ao conjunto N:

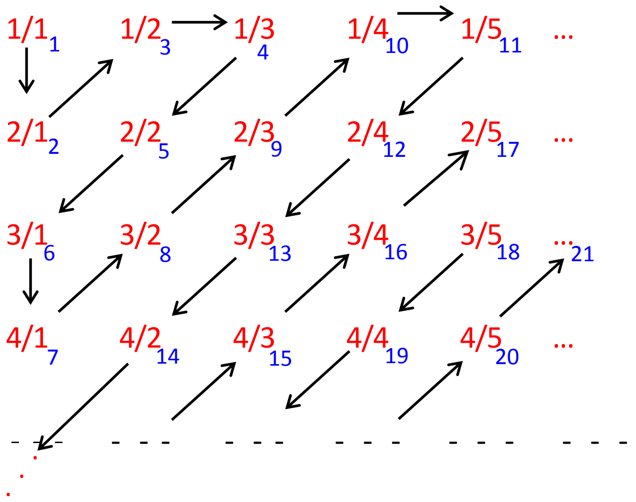
Z		N
0	→	0
-1	→	1
+1	→	2
-2	→	3
+2	→	4
-3	→	5
-3	→	6
	⋮	



Todo conjunto que puder ser emparelhado com o conjunto N, isto é: que puder **ser enumerável**, é dito **enumerável**, e se ele for infinito, **infinito enumerável**, (também chamado por **infinito contável**).

5. UMA OUTRA FORMA EMPARELHAMENTO

Em 1873 Cantor (então com 23 anos de idade) descobriu que o conjunto dos números racionais Q = {1/2, 1/3, ¼, 2/3, ¾, ...} era infinito enumerável também: **card(Q)** = **card(N)** = ℵ. De fato:



← Card(Q) = Card(N) →

N		Q
1	↔	1/1
2	↔	2/1
3	↔	1/2
4	↔	1/3

Todos os conjuntos que podem ser contados são **contáveis**, são **enumeráveis**. Q é **infinito enumerável**[1].

6. UM FATO ASSOMBROSO!

Neste mesmo ano, em dezembro de 1873, Cantor descobriu que **o conjunto dos números reais R era infinito não enumerável**, isto é: card (R) ≠ card(N)! De fato, **por absurdo, suponhamos que fosse possível contá-los**, tomemos o intervalo de 0 até 1 e escrevamos esses números na sua forma decimal, isto é: um zero e uma sequência infinita de algarismos (p. ex.: 0,6321471987...) escritos algebricamente na forma 0,XXX..., assim:

$a_1 = 0, X_{11}\, X_{12}\, X_{13}\, X_{14} \ldots$

$a_2 = 0, X_{21}\, X_{22}\, X_{23}\, X_{24} \ldots$

$a_3 = 0, X_{31}\, X_{32}\, X_{33}\, X_{34} \ldots$ (p. ex.: $X_{31}^{=6}$, $X_{32}^{=3}$, $X_{33}^{=2}$, ...)

$a_n = 0, X_{n1}\, X_{n2}\, X_{n3}\, X_{n4} \ldots$

Assim fazendo, colocando todos os números reais de 0 a 1, nota-se, ao final , que ainda existe um número entre 0 e 1 que não consta nessa lista. Esse número é construído na forma seguinte: b = 0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, ... onde se escolhe, para Y_1, um algarismo diferente do 1º algarismo do 1º número da lista, isto é: escolhe-se $Y_1 \neq X_{11}$.
E, em seguida, escolhe-se para Y_2, um algarismo diferente do 2º algarismo do 2º número da lista, isto é: escolhe-se $Y_2 \neq X_{22}$. Ainda mais, escolhe-se para Y_3, um algarismo diferente do 3º algarismo do 3º número da lista, isto é: escolhe-se $Y_3 \neq X_{33}$. E assim por diante, até o final da lista, constituindo-se o número b:

---

[1] Lacan (Outros Escritos, p. 488) afirma: "... a demanda é enumerável em suas voltas. É claro que, mesmo que não se deva imaginar o furo, a volta só ex-siste pelo número com que se inscreve no corte [...]. Insisto: a volta em si não é contável; repetitiva, ela não fecha nada, não é nem o dito, nem o por dizer [a] representação inicial do corte pelo qual do toro se faz a banda de mœbius, uma demanda é suficiente, mas pode se re-petir por ser enumerável, isso equivale a dizer que ela só se emparelha com a volta dupla em que se funda a banda ao se colocar a partir do transfinito (cantoriano).
[...] Como o transfinito continua exigível, pelo fato de nada, como dissemos, se contar aí se o corte não se fechar, e o dito transfinito, tal como o próprio Deus, de quem sabemos que ele se vangloria, é intimado a ser ímpar. É isso que se acrescenta uma diz-mensão à topologia de nossa prática do dizer."

b = $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ Verifica-se, aí, que esse número b não consta da lista dos números a_n acima, pois, b é diferente da a_1 porque $Y_1 \neq X_{11}$; b é diferente de a_2 porque $Y_2 \neq X_{22}$; b é diferente de a_3 porque $Y_3 \neq X_{33}$, e assim por diante.

Conclui-se, então, que se existisse uma lista completa de números reais, seria sempre possível construir um número real que não faria parte dessa lista. Portanto, essa lista nunca será completa. Na verdade, pode-se construir uma infinidade de números reais que não fazem parte dessa lista. Logo, **essa lista não pode ser feita**, ou seja, **os números reais não podem ser enumerados**, não podem ser contados: eles **constituem um infinito não enumerável** (ou **não contável**), **um infinito diferente do infinito dos números naturais**; Cantor designou-o com a notação $\aleph_1$ (alef um), reservando a notação $\aleph_0$ (alef zero) para o infinito dos números naturais.

Essa demonstração, feita por Cantor, de que os números reais não são enumeráveis, recebeu o nome de **a demonstração pelo Método da Diagonal**.

Com isso ficou evidente a existência de infinitos distintos

7. EXISTIRÃO OUTROS INFINITOS?

Cantor provou que sim, que há vários infinitos, cujas cardinalidades foram notadas por $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2\, \aleph_3 \ldots$, e constituem uma **sequência infinita de alefs**, que receberam o nome de **NÚMEROS TRANSFINITOS**, começando com o infinito enumerável e prosseguindo com os não enumeráveis.

Vimos que o 2º alef, ($\aleph_1$), é não enumerável, e Cantor provou que somando +1 ao 1º alef, $\aleph_0$, continua-se sempre no $\aleph_0$, isto é, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. Vemos então que **nunca atingirá o 2º número transfinito**, o $\aleph_1$. Lacan se serviu disso para mostrar a inacessibilidade[2] do real pelo dizer.

8. NOTAS

a- O conjunto dos subconjuntos de um conjunto A é notado por $\mathcal{P}$(A). Ex.: A = {a, b, c}; card(A) = 3
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ – $\text{card}\,[\mathcal{P}(A)] = 2^3 = 8$.
Se card (B) = n então card $[\mathcal{P}(B)] = 2^n$.

b- Mostra-se que a cardinalidade de R é a mesma que a cardinalidade de P(Q), ou seja: a mesma que card[P(N)]. E daí, mostra-se que card(R) = $2^{\text{card (N)}}$; foi o que fez Cantor – $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

c- Os **números racionais** (aqueles que podem ser escritos na forma de uma razão, p. ex.: 2/3, m/n...) podem ser colocados na forma decimal:
2/3 = 0,6666... (dízima periódica)
4/8 = 0,5000... (na prática, omite-se os zeros)
Teoricamente todos os números **racionais**, quando são escritos na forma decimal, são dízimas periódicas:
8/4 = 0,5000... = 4,999...
0,2999... = (29 - 2)/90 = 27/90 = 0,3000... = 0,3
Já os números ***irracionais*** (aqueles que **não** podem ser escritos na forma de uma razão como, p. ex.: $\sqrt{2}$, $\pi, etc.$) podem ser escritos na forma decimal, mas de maneira incompleta, pois exigem infinitos algarismos e nunca formam dízimas periódicas (são aperiódicos), como p. ex.:
$\sqrt{2}$ = 1,414 213 562... $\simeq$ 1,4142 ou: π = 3,141 592 653... $\simeq$ 3,1416

d- Os números reais R encampam os números naturais N, os inteiros relativos Z, os racionais Q e os irracionais.

---

[2] Lacan (Outros Escritos, p. 478) indica: "[...] o que se profere a partir do dizer de Cantor é que a série dos números não representa, no transfinito, nada além da inacessibilidade que começa no dois [Deux], e pela qual deles [d' eux] se constitui o enumerável até o infinito. Por conseguinte, faz-se necessária uma topologia pelo fato de o real só reaparecer pelo discurso da análise, para confirmar esse discurso, e que seja pela hiância aberta por esse discurso, ao se fechar além dos outros discursos, que esse real revele ex-sistir."